

معادلات حاکم و شکل بی بعد آنها برای یک ماده تغییر فاز دهنده خالص

<b>Nomenclature</b> فهرست علائم و اختصارات	
$S(T)$	<i>Carman-koseny equation (source term)</i>
$\varepsilon$	<i>A small value equation (carman-koseny equation constant)</i>
$A_{mush}$	<i>Mushy-zone constant (<math>10^{-3}</math>) (carman-koseny equation constant)</i>
$C$	<i>Specific heat (<math>J/kg.k</math>)</i>
$C_p$	<i>Specific heat in constant pressure (<math>J/kg.K</math>)</i>
$g$	<i>Gravity (<math>m/s^2</math>)</i>
$k$	<i>Thermal conductivity (<math>W/m.K</math>)</i>
$L$	<i>Latent heat of fusion (<math>J/kg</math>)</i>
$P$	<i>Pressure (<math>pa</math>)</i>
$T$	<i>Temperature (<math>K</math>)</i>
$t$	<i>Time (<math>s</math>)</i>
$L_x$	<i>Length x- direction (<math>m</math>)</i>
$L_y$	<i>Length y- direction (<math>m</math>)</i>
$u$	<i>Velocity in the x-direction (<math>m/s</math>)</i>
$v$	<i>Velocity in the y-direction (<math>m/s</math>)</i>
$T_f$	<i>Melting temperature (<math>K</math>)</i>
$\nu$	<i>Dynamic viscosity (<math>pa.s</math>)</i>
$Ra$	<i>Rayleigh number</i>
$Pr$	<i>Prandtl number</i>
$Ste$	<i>Stefan number</i>

<i>Greek symbols</i>	
$\varphi(T)$	<i>Liquid fraction</i>
$\alpha$	<i>Thermal diffusivity (<math>m^2/s</math>)</i>
$\mu$	<i>Viscosity (<math>kg/m.s</math>)</i>
$\rho$	<i>Density (<math>kg/m^3</math>)</i>
$\Delta T$	<i>Mushy-zone temperature range (K)</i>
$\beta$	<i>Thermal expansion coefficient (1/K)</i>
$\theta$	<i>Non-dimensional temperature</i>
$f$	<i>Non-dimensional Liquid fraction</i>
$\phi$	<i>Normalized volume fraction of nanoparticles</i>

<i>Subscripts</i>	
$F$	<i>Fusion</i>
$l$	<i>Liquid phase</i>
$s$	<i>Solid phase</i>
$w$	<i>Hot</i>
$c$	<i>Cold</i>
$R$	<i>Ratio</i>
$0$	<i>Initial value</i>

## معادلات حاکم (Governing Equations)

*For liquid (melt):*

برای فاز مایع (ذوب شده):

*The mass and momentum (x and y) conservation equation used in liquid phase is:*

معادله بقای جرم و مومنتوم (در راستای X و Y) برای فاز مایع خواهند بود:

*Continuity*

پیوستگی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

*Momentum in x-direction*

مومنتوم در جهت X

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S(T) \cdot u \quad (2)$$

*Momentum in y-direction*

مومنتوم در جهت Y

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \bar{g} \beta (T - T_c) + S(T) \cdot v \quad (3)$$

*For solid phase:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

For solid phase:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

کسر فاز مایع در حالت تغییر فاز از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{کسر ذوب شده} = \frac{\text{ناحیه سیال}}{\text{تمام ناحیه}}$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 0 & T < T_f - \frac{\Delta T}{2} \\ \frac{T - (T_f + \Delta T/2)}{\Delta T} & T_f - \frac{\Delta T}{2} < T < T_f + \frac{\Delta T}{2} \\ 1 & T > T_f + \frac{\Delta T}{2} \end{cases} \quad (6)$$

معادله Carman-koseny در *source term* ظاهر شده است که خود نیز در معادله انتقال مومنتوم (*momentum*)

*conservation* قرار دارد

$$S(T) = -A_{mush} \frac{(1 - \varphi(T))^2}{\varphi(T)^3 + \varepsilon} \quad (7)$$

نیروی شناوری (*buoyant force*) که منجر به انتقال گرمای طبیعی در بخش مایع *PCM* می گردد توسط تقریب

*Boussinesq* خواهد شد:

$$\vec{F} = \rho_l \beta \vec{g} (T - T_f) \quad (8)$$

پارامترهای بی بعد حاکم به صورت زیر خواهند بود:

$$X = \frac{x}{L_y}, \quad Y = \frac{y}{L_y}, \quad U = \frac{u L_y}{\alpha_l}, \quad V = \frac{v L_y}{\alpha_l}, \quad \theta = \frac{(T - T_f)}{T_w - T_f} \quad (9)$$

$$P = \frac{\rho L_y^2}{\rho \alpha_l^2}, \quad \alpha = \frac{\alpha_s}{\alpha_l}, \quad F_0 = \frac{t \alpha_l}{L_y^2}, \quad S(T) = \frac{S(T) L_y^2}{\rho \alpha_l}, \quad R_k = \frac{k_s}{k_f}$$

که  $\mu = \nu \times \rho_l$  و  $\alpha = \frac{k_l}{\rho_l c_l}$ . اعداد بی بعد حاکم نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Ra = \frac{\rho^2 c_l g \beta L_y^3 (T_w - T_f)}{\mu k_l}$$

$$ste = \frac{c_l (T_w - T_f)}{L} \quad (10)$$

$$pr = \frac{c_l \mu}{k_l}$$

که پس از جایگذاری عبارات بی بعد در معادلات (۱) تا (۵) و ساده سازی معادلات بی بعد زیر به دست می آید:

**For liquid (melt):**

**Continuity (پیوستگی):**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (11)$$

**Momentum in x-direction (مومنوم در جهت x):**

$$\frac{\partial U}{\partial F_0} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial X} + pr \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + S(T) \cdot U \quad (12)$$

**Momentum in y-direction (مومنوم در جهت y):**

$$\frac{\partial V}{\partial F_0} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial Y} + pr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Rapr\theta + S(T) \cdot V \quad (13)$$

**Energy in melt (معادله انرژی):**

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + u \frac{\partial \theta}{\partial X} + v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{Ste} \frac{\partial f}{\partial F_0} \quad (14)$$

For solid phase:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{\alpha_s}{\alpha_l} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (15)$$

معادله های (۹) و (۱۰) می توانند به صورت زیر نیز نوشته شوند:

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + u \frac{\partial \theta}{\partial X} + v \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{Ste} \frac{\partial f}{\partial F_0} \quad (16)$$

$$\alpha = f + (1-f) \frac{\alpha_s}{\alpha_l} \quad (17)$$

برای فاز مایع  $(\theta > 0, \varphi = 1), \alpha = 1$  و برای فاز جامد  $(\theta < 0, \varphi = 0), \alpha = \frac{\alpha_s}{\alpha_l}$